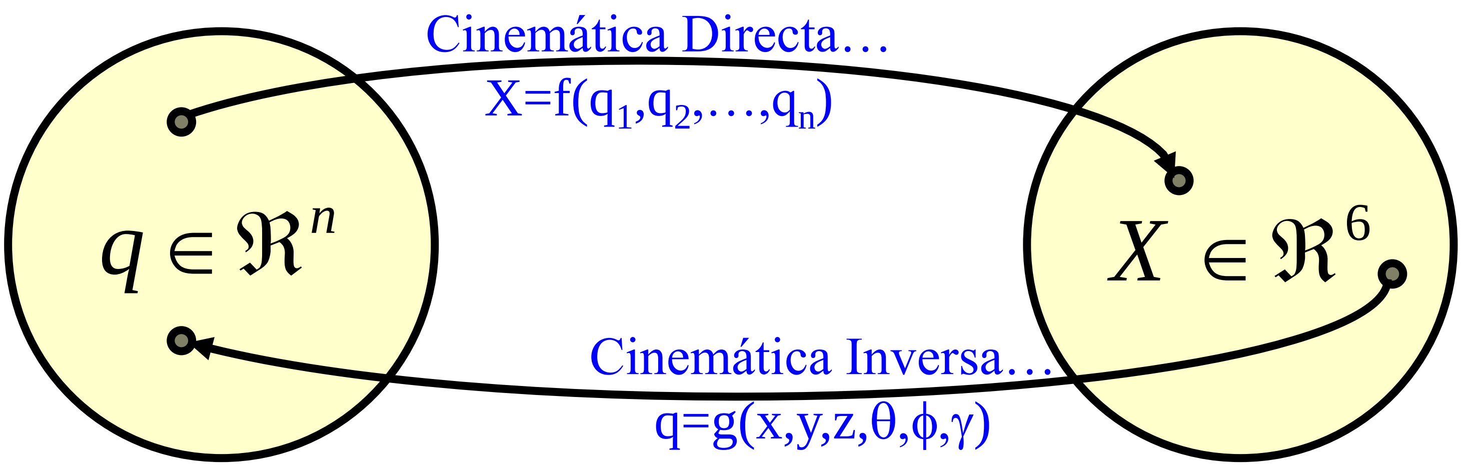
Fundamentos de Robótica: Velocidad Cinemática

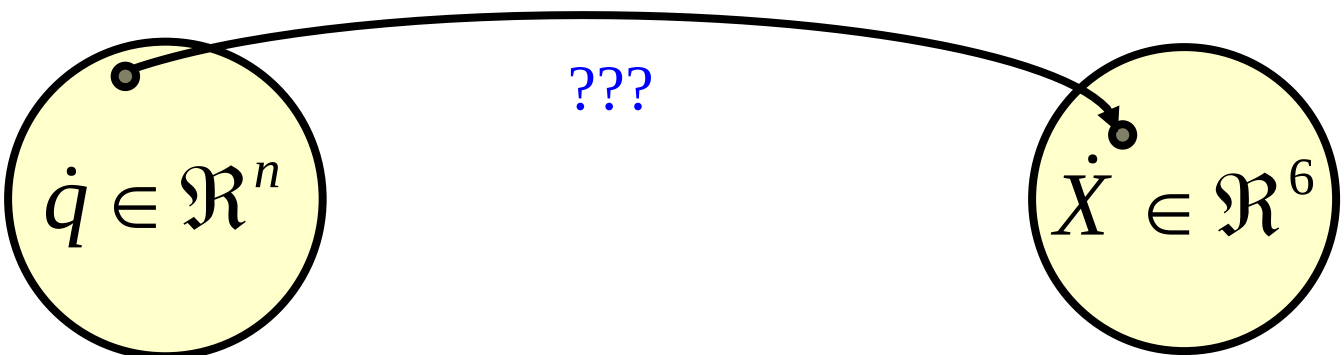
Juan Carlos Grieco, Universidad Simón Bolívar
Gerardo Fernández L, Universidad Simón Bolívar
Cecilia Murrugarra Q., Universidad Simón Bolívar

Velocidad Cinemática

Información de Posición de un robot…

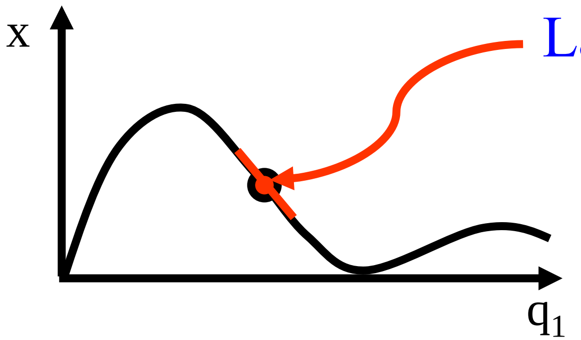


Pero, que relación existe entre las velocidades???



Velocidad Cinemática

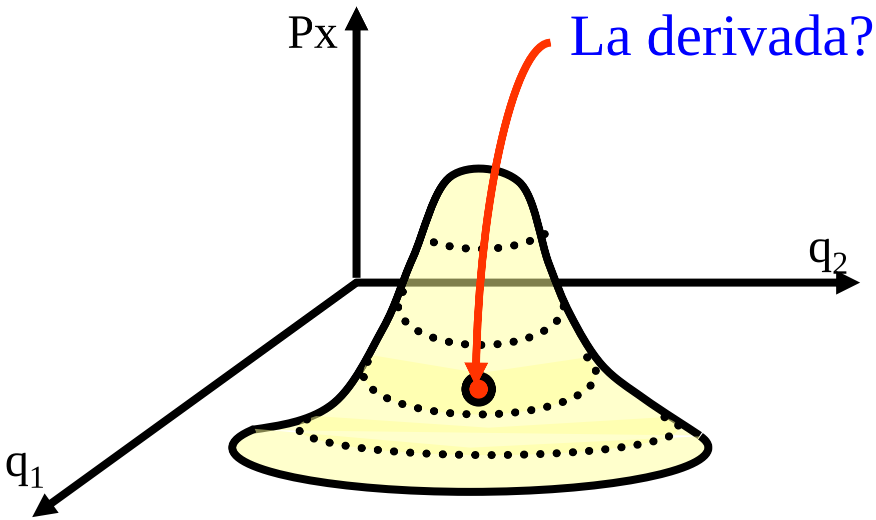
Consideremos $x=f(q_1)$…

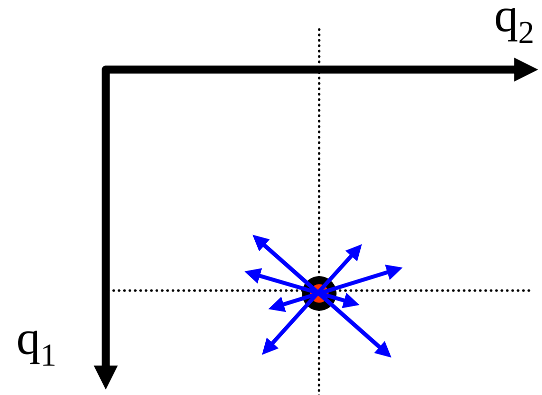


La derivada es la pendiente…

Consideremos $x=f(q_1,q_2)$…

La derivada?????





Versión vectorial de la derivada…

JACOBIANO…

Velocidad Cinemática

Importancia del JACOBIANO…

Está relacionado con:

- Configuraciones Singulares

  Análisis de redundancia

  Planificación de trayectorias

  Uso de algoritmos de Cin. Inversa

  Dinámica del robot…Fuerzas estáticas

Velocidad Cinemática

EL JACOBIANO…

Para un robot la cinemática viene dada por

$$T_0^n(q_1, q_2, \ldots, q_n) = \begin{bmatrix} R_0^n(q_1, \ldots, q_n) & d_0^n(q_1, \ldots, q_n) \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$\downarrow$

"Cambia con el tiempo"

$\downarrow$

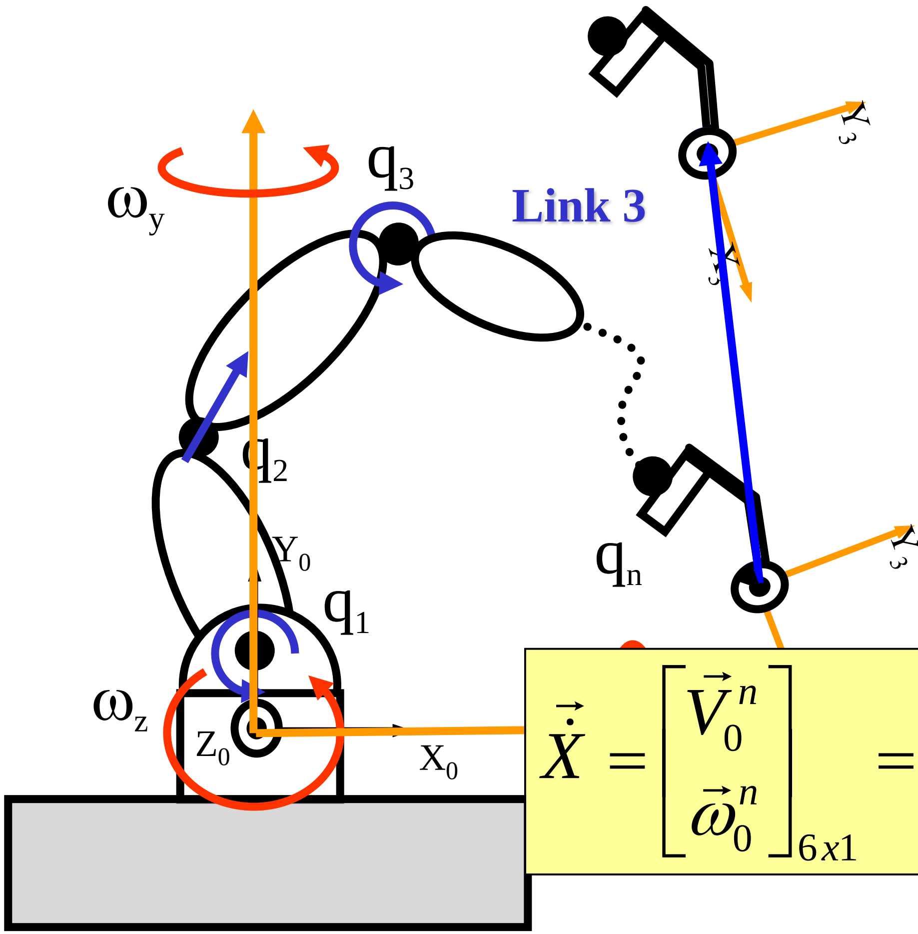
"La posición y la orientación cambia con el tiempo"

Consideremos

$$\vec{q}(t) = \begin{bmatrix} q_1(t) \\ q_2(t) \\ \vdots \\ q_n(t) \end{bmatrix}$$

$$\vec{\dot{X}}(t) \Rightarrow q(t), \dot{q}(t)$$

Velocidad Cinemática



Definamos…

Velocidad Lineal $\vec{V}_0^n$

Velocidad Angular $\vec{\omega}_0^n$

$$\vec{V}_0^n = J_L(q) \cdot \vec{\dot{q}}$$

$$\vec{\omega}_0^n = J_\omega(q) \cdot \vec{\dot{q}}$$

$$\vec{\dot{X}} = \begin{bmatrix} \vec{V}_0^n \\ \vec{\omega}_0^n \end{bmatrix}_{6x1} = \begin{bmatrix} J_L(q)_{3xn} \\ J_\omega(q)_{3xn} \end{bmatrix}_{6xn} \cdot \vec{\dot{q}}_{6xn} = J(q)_{6xn} \cdot \vec{\dot{q}}_{6xn}$$

$$\vec{\dot{X}} = J(q)_{6xn} \cdot \vec{\dot{q}}_{6xn}$$

Velocidad Cinemática

Cálculo del JACOBIANO…

Método analítico

$$X_T = d_0^n(q_1,\ldots,q_n)$$

Velocidad Lineal $\vec{V}_0^n = J_L(q)\cdot\vec{\dot{q}}$

$$\vec{\dot{X}}_T = \frac{d}{dt}\left(\vec{d}_0^n(q_1,\ldots,q_n)\right)$$

$$\dot{X}_T = \frac{\partial d_0^n}{\partial q_1}\cdot\frac{dq_1}{dt} + \frac{\partial d_0^n}{\partial q_2}\cdot\frac{dq_2}{dt} + \ldots + \frac{\partial d_0^n}{\partial q_n}\cdot\frac{dq_n}{dt}$$

$$\dot{X}_T = \frac{\partial d_0^n}{\partial q_1}\cdot\dot{q}_1 + \frac{\partial d_0^n}{\partial q_2}\cdot\dot{q}_2 + \ldots + \frac{\partial d_0^n}{\partial q_n}\cdot\dot{q}_n$$

$$\dot{X}_T = \begin{bmatrix} \frac{\partial d_0^n}{\partial q_1} & \frac{\partial d_0^n}{\partial q_2} & \cdots & \frac{\partial d_0^n}{\partial q_n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}$$

$$\dot{X}_{T(3xn)} = \begin{bmatrix} J_{1(3x1)} & J_{2(3x1)} & \cdots & J_{n(3x1)} \end{bmatrix}_{3xn} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}_{nx1} \Rightarrow \vec{\dot{X}}_T = \left[J_L\right]_{3xn}\cdot\vec{\dot{q}}$$

Velocidad Cinemática

Cálculo del JACOBIANO…

Método analítico

$$R_0^n(q_1,\ldots,q_n)$$

Velocidad angular $\vec{\omega}_0^n = J_{\omega}(q)\cdot\vec{\dot{q}}$

$$\dot{R}_0^n = S(\omega)R_0^n \qquad S(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dot{R}_0^n \cdot R_0^{n^T} = S(\omega) \Rightarrow \omega_0^n = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix}$$

$$\boxed{\omega^n_{0\,(3x1)} = \begin{bmatrix} J_{1(3x1)} & J_{2(3x1)} & \cdots & J_{n(3x1)} \end{bmatrix}_{3xn} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \vdots \\ \dot{q}_n \end{bmatrix}_{nx1} \Rightarrow \omega_0^n = \begin{bmatrix} J_{\omega} \end{bmatrix}_{3xn} \cdot \vec{\dot{q}}}$$

Velocidad Cinemática

Ejemplo…

$$A_0^n = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & (0,5+q_2)\cos q_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & (0,5+q_2)sen q_1 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Velocidad Lineal

$$\begin{aligned} x &= (0,5+q_2)\cos q_1 \\ y &= (0,5+q_2)sen q_1 \\ z &= q_3 \end{aligned} \quad \xrightarrow{d/dt} \quad \begin{aligned} V_x &= -(0,5+q_2)sen q_1 \cdot \dot{q}_1 + \cos q_1 \cdot \dot{q}_2 + 0 \cdot \dot{q}_3 \\ V_y &= (0,5+q_2)\cos q_1 \cdot \dot{q}_1 + sen q_1 \cdot \dot{q}_2 + 0 \cdot \dot{q}_3 \\ V_z &= \dot{q}_3 \end{aligned}$$

$$V_0^3 = \begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(0,5+q_2)sen q_1 & \cos q_1 & 0 \\ (0,5+q_2)\cos q_1 & sen q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad J_L = \begin{bmatrix} -(0,5+q_2)sen q_1 & \cos q_1 & 0 \\ (0,5+q_2)\cos q_1 & sen q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Velocidad Cinemática

Ejemplo…

$$A_0^n = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & (0{,}5+q_2)\cos q_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & (0{,}5+q_2)sen q_1 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Velocidad Angular

$$\dot{R}_0^n \cdot R_0^{n^T} = S(\omega)$$

$$R_0^n = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 \\ s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\dot{R}_0^n \cdot R_0^{n^T} = S(\omega) = \begin{bmatrix} -s_1 \cdot \dot{q}_1 & -c_1 \cdot \dot{q}_1 & 0 \\ c_1 \cdot \dot{q}_1 & -s_1 \cdot \dot{q}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} c_1 & s_1 & 0 \\ -s_1 & c_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$S(\omega) = \begin{bmatrix} 0 & -\dot{q}_1 & 0 \\ \dot{q}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{bmatrix}$$

$$\omega_0^n = \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{q}_1 \end{bmatrix}$$

$$\omega_0^n = \begin{bmatrix} 0_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

$$J_\omega = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Velocidad Cinemática

Ejemplo…

$$A_0^n = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & (0{,}5+q_2)\cos q_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & (0{,}5+q_2)sen q_1 \\ 0 & 0 & 1 & q_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Agrupando tenemos…

$$\begin{bmatrix} V_x \\ V_y \\ V_z \\ \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} J_L \\ J_\omega \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix} = \boxed{\begin{bmatrix} -(0{,}5+q_2)sen q_1 & \cos q_1 & 0 \\ (0{,}5+q_2)\cos q_1 & sen q_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}} \cdot \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \\ \dot{q}_3 \end{bmatrix}$$

JACOBIANO

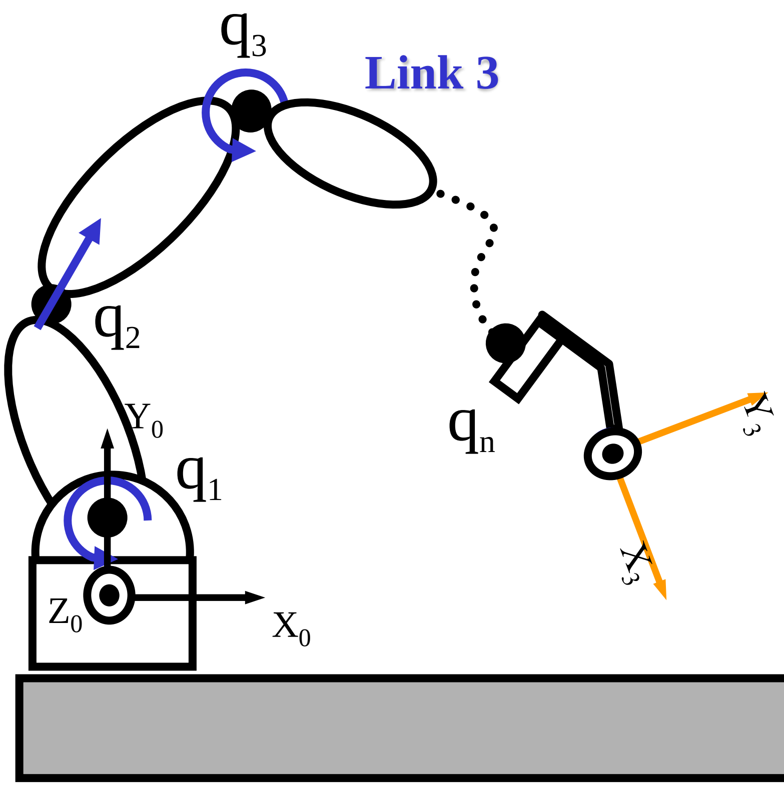
El Jacobiano

Método Cinemático

$$J = \begin{bmatrix} J_{1l} & J_{2l} & J_{3l} & \cdots & J_{nl} \\ \hline J_{1w} & J_{2w} & J_{3w} & \cdots & J_{nw} \end{bmatrix}_{6xn}$$

Un J_i por cada articulación…

$$J = \begin{bmatrix} J_1 \mid J_2 \mid J_3 \mid \cdots \mid J_n \end{bmatrix}$$



Articulación Rotacional

$$J_i = \begin{bmatrix} Z_{i-1} \times (O_n - O_{i-1}) \\ Z_{i-1} \end{bmatrix}$$

$$A_0^{i-1} = \begin{bmatrix} X_{i-1} & Y_{i-1} & Z_{i-1} & O_{i-1} \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El Jacobiano… Ejemplo

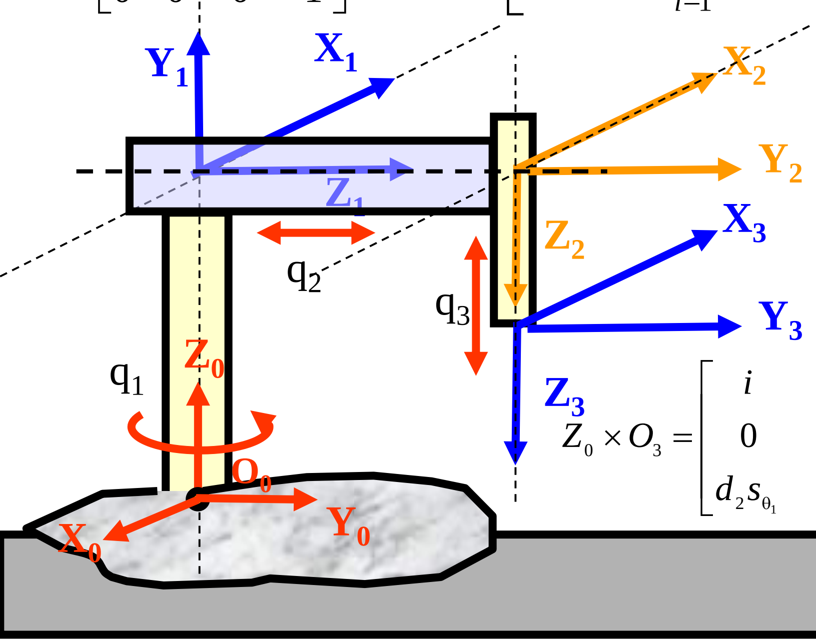
$$A_0^1 = \begin{bmatrix} c_{\theta 1} & 0 & s_{\theta 1} & 0 \\ s_{\theta 1} & 0 & -c_{\theta 1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2^3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_0^2 = \begin{bmatrix} c_{\theta 1} & s_{\theta 1} & 0 & d_2 s_{\theta 1} \\ s_{\theta 1} & -c_{\theta_i} & 0 & -d_2 c_{\theta 1} \\ 0 & 0 & -1 & h \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_0^3 = \begin{bmatrix} c_{\theta 1} & s_{\theta 1} & 0 & d_2 s_{\theta 1} \\ s_{\theta 1} & -c_{\theta_i} & 0 & -d_2 c_{\theta 1} \\ 0 & 0 & -1 & h - d_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_1^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & d_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$J = \begin{bmatrix} J_{1(rot)} & J_{2(pris)} & J_{3(pris)} \end{bmatrix}$$

$$J_{i(rot)} = \begin{bmatrix} Z_{i-1} \times (O_n - O_{i-1}) \\ Z_{i-1} \end{bmatrix} \qquad J_{i(pris)} = \begin{bmatrix} Z_{i-1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{array}{cccc} & \text{Rot} & \text{Pris} & \text{Pris} \\ J = & \left[\begin{array}{c} Z_0 \times (O_3 - O_0) \\ Z_0 \end{array}\right. & \begin{array}{c} Z_1 \\ 0 \end{array} & \left.\begin{array}{c} Z_2 \\ 0 \end{array}\right] \end{array}$$



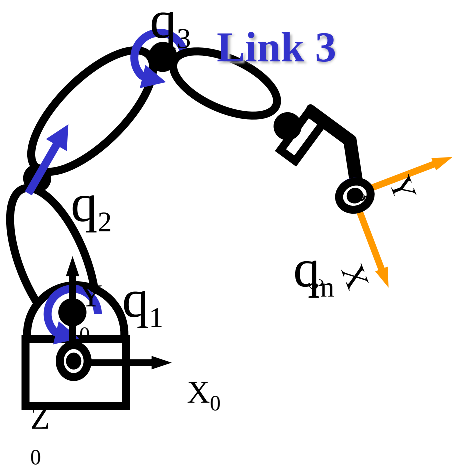
$$Z_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$Z_0 \times O_3 = \begin{bmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ d_2 s_{\theta_1} & -d_2 c_{\theta_1} & h - d_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_2 c_{\theta_1} \\ d_2 s_{\theta_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

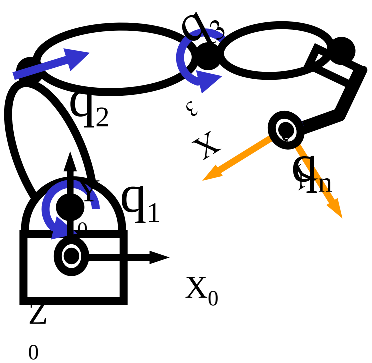
$$\dot{X} = J\dot{q} = \begin{bmatrix} d_2 c_{\theta_1} & s_{\theta_1} & 0 \\ d_2 s_{\theta_1} & -c_{\theta_1} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{d}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix}$$

El Jacobiano… Singularidades

$$v = J(q)\cdot \dot{q}$$



J_1



J_2

Conocerlas es importante por:

a) Se reduce la movilidad del robot

configuración $q_1, q_2, \ldots, q_n$ el Jacobiano J pierde Rango…

b) Pueden existir infinitas soluciones a la Cin. Inv.

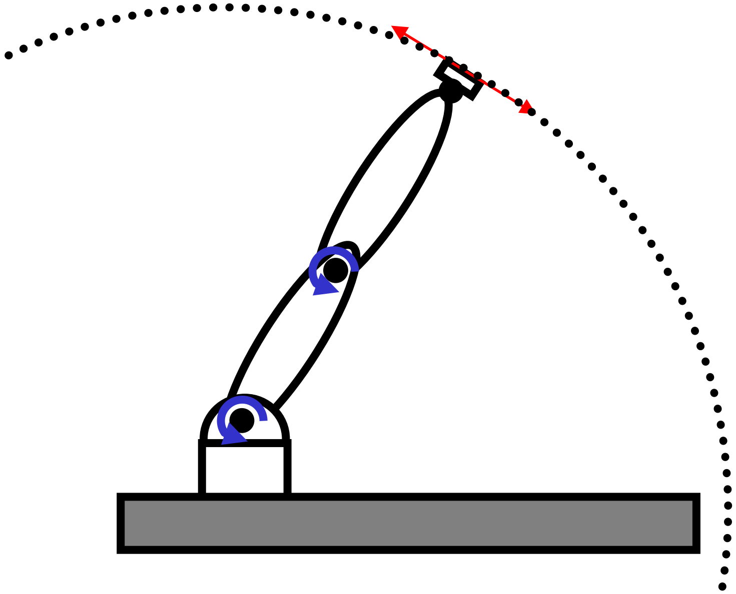
c) En la vecindad de la singularidad, se puede "exigir" demasiado al robot…

Configuración Singular

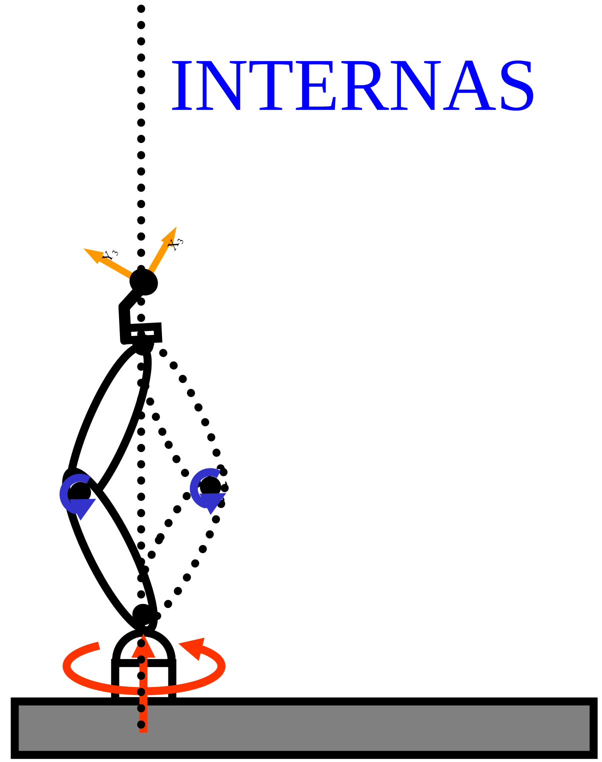
El Jacobiano… Singularidades

Existen dos clases de singularidad…

DE FRONTERA



INTERNAS



El Jacobiano… Singularidades…Cálculo…

En la singularidad "J" pierde rango por lo que…

$$det(J(q)) = 0 \quad \Rightarrow \quad J(q)^{-1} \ no\ existe$$

Ej…

$$\vec{v} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} v_x &= \dot{q}_1 + \dot{q}_2 \\ v_y &= 0 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad \det(J) = 0 - 0 = 0$$

El robot pierde movilidad en "Y"…

Singularidad de Frontera

El Jacobiano… Singularidades…Cálculo…

Cuando "J" es cuadrada…la inversa viene a ser…

$$\dot{q} = J(q)^{-1}\vec{v} \quad \Rightarrow \quad det(J(q)) = 0 \quad \Rightarrow J(q)^{-1} \; no\ existe$$

Cuando "J" no es cuadrada…como invertimos?

$$v = J(q) \cdot \dot{q}$$

$$\dot{q} \in \Re^{n}$$

$$v \in \Re^{r}$$

Si r < n

$$\dot{q}_{n\times 1} = J(q)^{T}{}_{n\times r}\left(J(q)J(q)^{T}\right)^{-1}{}_{r\times r} v_{r\times 1}$$

$$J(q)\dot{q} = J(q)J(q)^{T}\left(J(q)J(q)^{T}\right)^{-1} v$$

$$J(q)\dot{q} = v$$

$$\dot{q}_{n\times 1} = J^{+}v$$

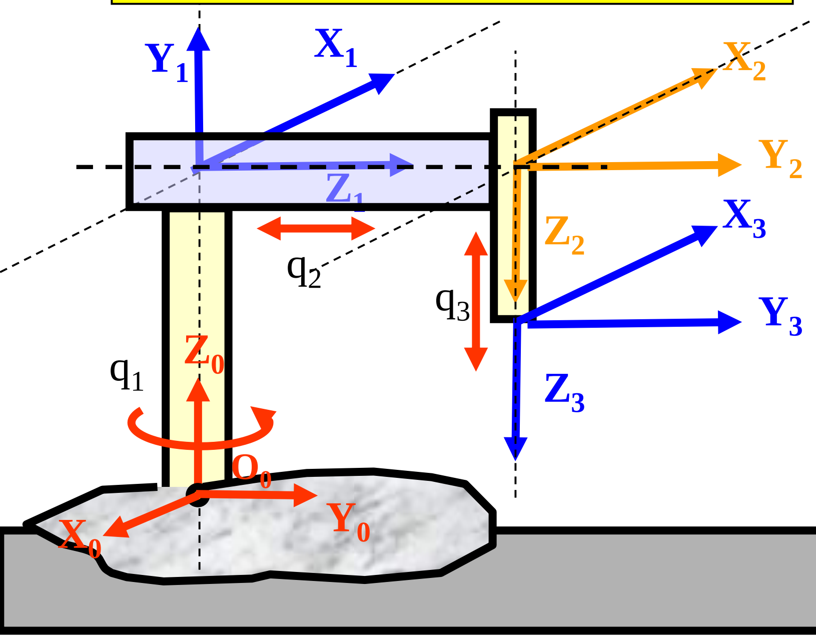
$$J^{+} = J(q)^{T}\left(J(q)J(q)^{T}\right)^{-1}$$

"J^{+}" es la Pseudoinversa

por la derecha…

El Jacobiano… Singularidades…Cálculo…

$$\dot{X} = J\dot{q} = \begin{bmatrix} d_2 c_{\theta_1} & s_{\theta_1} & 0 \\ d_2 s_{\theta_1} & -c_{\theta_1} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{d}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix}$$



"J" reducido…

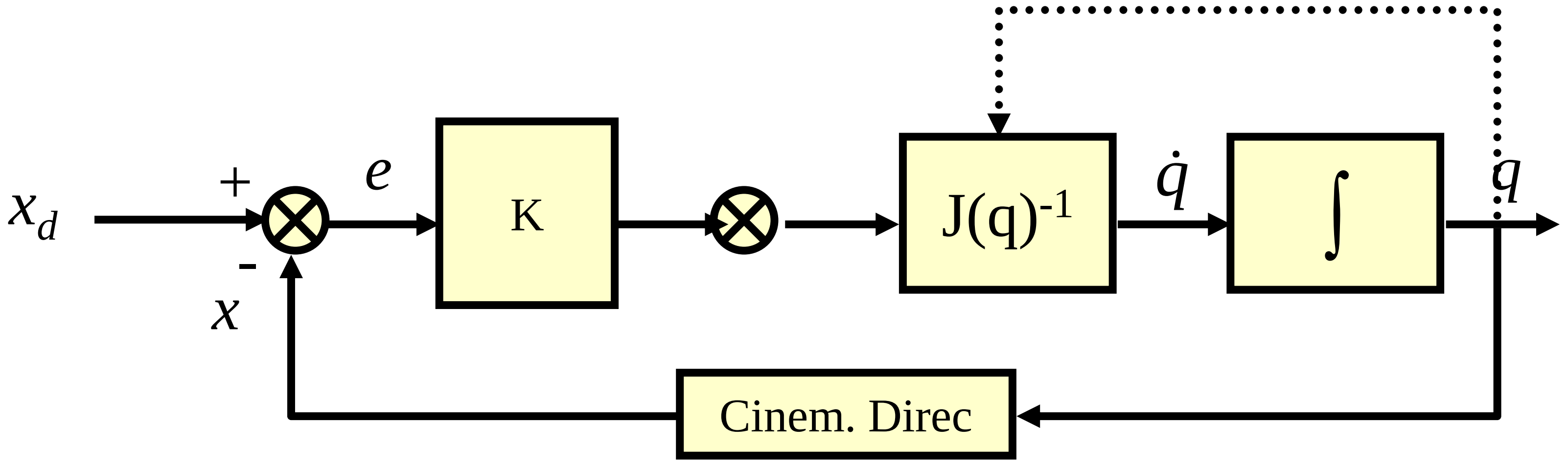
$$\dot{X} = \begin{bmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{bmatrix} = J_{vl}\dot{q} = \begin{bmatrix} d_2 c_{\theta_1} & s_{\theta_1} & 0 \\ d_2 s_{\theta_1} & -c_{\theta_1} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \bullet \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{d}_2 \\ \dot{d}_3 \end{bmatrix}$$

$$det(J) = d_2 c_{\theta_1} c_{\theta_1} + d_2 s_{\theta_1} s_{\theta_1} = d_2$$

$$det(J) = 0 \Rightarrow d_2 = 0$$

Variación de q_1 no afecta al elemento terminal…

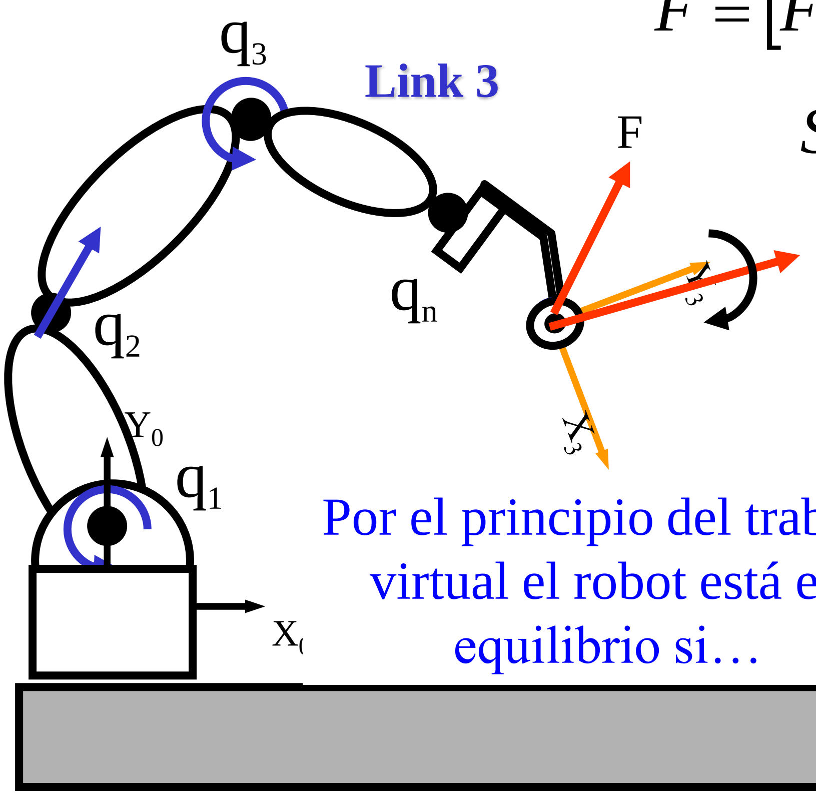
Así, el algoritmo puede implementarse como…



El Jacobiano… Relación PAR-FUERZA

La Estática estudia la relación entre distintas fuerzas…con el robot en equilibrio

$$\vec{F} = \begin{bmatrix} F_x & F_y & F_z & M_x & M_y & M_z \end{bmatrix}^T$$



$$Sea \quad d\vec{x} = J(q)dq \qquad \delta w_\gamma = F^T d\vec{x}$$

$$\delta w_\tau = \tau^T d\vec{q}$$

$$\boxed{\tau = J(q)^T \cdot F}$$

$$\delta w_\gamma - \delta w_\tau = 0 \quad \forall \delta q$$

Por el principio del trabajo virtual el robot está en equilibrio si…

$$F^T d\vec{x} = \tau^T d\vec{q}$$

$$F^T J(q) d\vec{q} = \tau^T d\vec{q} \quad \Rightarrow F^T J(q) = \tau^T$$